SCOMPOSIZIONE
DI
POLINOMI

Ricordiamo che ogni numero che non sia:

OGNI NUMERO CHE NON SIA PRIMO SI PUO' SCOMPORRE OVVERO SCRIVERE COME PRODOTTO DI NUMERI PERIMI O PRODOTTO DI POTENZE DI NUMERI PRIMI:

ESEMPI: $6 = 2 \times 3$ $\quad$ $12 = 2^2 \times 3$ $\quad$ $25 = 5^2$

ANCHE I POLINOMI SI POSSONO **SCOMPORRE**, OVVERO **SCRIVERE COME PRODOTTO DI POLINOMI DI GRADO MINORE** :

$x^2 - 4$

Infatti si può scrivere:

$$\underbrace{x^2 - 4}_{\text{grado 2}} = \underbrace{(x-2)}_{\text{grado 1}} \cdot \underbrace{(x+2)}_{\text{grado 1}}$$

$x^4 + x^2$

Infatti si può scrivere:

$$\underbrace{x^4 + x^2}_{\text{grado 4}} = \underbrace{x^2}_{\text{grado 2}} \cdot \underbrace{(x^2+1)}_{\text{grado 2}}$$

POLINOMI RIDUCIBILI E IRRIDUCIBILI

DEFINIZIONE | Polinomio riducibile e polinomio irriducibile

Un polinomio si dice:

- **riducibile** quando è scomponibile in fattori, ciascuno dei quali di grado minore del grado del polinomio;
- **irriducibile**, in caso contrario.

SONO ESEMPI DI POLINOMI **RIDUCIBILI** TUTTI QUELLI CHE SI POSSONO SCOMPORRE (SCRIVERE) NEL PRODOTTO DI POLINOMI DI GRADO MINORE RISPETTO AL POLINOMIO DI PARTENZA:

$X^2 - 16 = (X + 4)(X - 4)$ $\quad\quad$ $4X^3 - 6X^2 = 2X^2\,(2X - 3)$

SONO ESEMPI DI POLINOMI **IRRIDUCIBILI:**

TUTTI I BINOMI DI PRIMO GRADO COME: $2x + 3$, $a + 5$, …….

TUTTI I BINOMI DI SECONDO GRADO CHE SEMPRE POSITIVI (qualsiasi valore numerico si dia alle lettere):

$a^2 + 1$ **oppure** $3x^2 + 5$ **oppure** $x^4 + 3$

TECNICHE DI SCOMPOSIZIONE IN FATTORI DI POLINOMI:

sono metodi che consentono di scrivere i polinomi come prodotto di altri polinomi sono:

. **RACCOGLIMENTO TOTALE** (o a fattor comune)

. **RACCOGLIMENTO PARZIALE**

. **SCOMPOSIZIONI CON PRODOTTI NOTEVOLI**

. **SCOMPOSIZIONE DI TRINOMI SPECIALI DI SECONDO GRADO**

. **RACCOGLIMENTO TOTALE** (o a fattor comune)

E’ un metodo che utilizza la **proprietà distributiva della moltiplicazione** **al contrario quando i termini del polinomio hanno un FATTORE COMUNE:**

Per la proprietà distributiva vale che:

$2x\,(3x + 1) = 6x^2 + 2x$

questa uguaglianza scritta al contrario, diventa:

$6x^2 + 2x = 2x\,(3x + 1)$ →

Il polinomio $6x^2 + 2x$ (di secondo grado) si scrive come (=) il prodotto del monomio $2x$ (fattore comune ai termini del polinomio) per un binomio di primo grado

Quando si puo’ applicare il metodo del raccoglimento totale, si dice che il IL **FATTOR COMUNE** è stato **RACCOLTO** o **MESSO IN EVIDENZA.**

REGOLA: IL RACCOGLIMENTO TOTALE SI PUO’ APPLICARE QUANDO I TERMINI DEL POLINOMIO HANNO UN FATTOR COMUNE: $AX + AY = A\,(X + Y)$

MA , DATO UN POLINOMIO, COME SI FA' A CALCOLARE IL FATTORE COMUNE TRA I SUOI TERMINI?

Si vuole scomporre il polinomio $2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$ (qui è semplice !)

Si vuole scomporre il polinomio $12a^2x^5 + 15a^3bx^3 - 18a^4cx^4$

Il FATTOR COMUNE (se esiste) è il MCD (massimo comune divisore) dei termini del polinomio, che è quel monomio che ha come coefficiente il MCD tra le parti numeriche e come parte letterale le SOLE lettere comuni ai termini del polinomio scritte con l'esponente piu' piccolo:

Si calcola il MCD tra i numeri 12, 15, 18; si considerano i divisori del numero piu' piccolo numero, I divisori di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6, 12 . Il piu' grande dei divisori che è anche divosore degli altri, ovvero di 15 e 18, è il MCD tra 12,15,18. NEL NOSTRO CASO MCD (12, 15, 18) = 3
COME PARTE LETTERALE SI PRENDONO SOLO LE LETTERE CHE COMPAIONO IN TUTTI I TRE TERMINI DEL POLINOMIO SCRITTE UNA SOLA VOLTA CON L'ESPONENTE PIU' PICCOLO: $\mathbf{a^2 x^3}$

IL FATTORE COMUNE DA RACCOGLIERE E': $\mathbf{3a^2x}$

il fattore $3a^2x^3$ lo si moltiplica per il polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio dato per tale fattore:

$$12a^2x^5 + 15a^3bx - 18a^4cx^4 = 3a^2x^3\left(\frac{12a^2x^5}{3a^2x^3} + \frac{15a^3bx^3}{3a^2x^3} - \frac{18a^4c\,x^4}{3a^2x^3}\right) = 3a^2x^3(4x^2 + 5b - 6a^2cx)$$

Si ricordi che nella divisione tra monomi si applica la regola $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Altri esempi:

$$4x^2y^4 + 6x = 2x \cdot \left(\frac{4x^2y^4}{2x} + \frac{6x}{2x}\right) = 2x \cdot (2xy^4 + 3)$$

I divisori di 4 sono: 1,2,4 $\longrightarrow$ 2 è il piu' grande dei divisori di 4 chè è anche divisore di 6 e la x è la sola lettera comune che scriviamo con esponente piu' piccolo….

Il fattore da raccogliere può essere anche un polinomio……….

Esempio: $3x \cdot (a + b) - 5y \cdot (a + b) = (a + b)(3x - 5y)$

ESEMPIO Raccoglimento totale di un monomio

Scomponiamo in fattori il polinomio $20x^5 + 35x^4 - 5x^3$ mediante un raccoglimento totale.

$$20x^5 + 35x^4 - 5x^3 = \qquad \text{M.C.D.}(20x^5, 35x^4, -5x^3) = 5x^3$$

$$= 5x^3 \cdot 4x^2 + 5x^3 \cdot 7x - 5x^3 \cdot 1 = \qquad \text{Mettiamo in evidenza } 5x^3 \text{ nei tre termini del polinomio}$$

$$= 5x^3(4x^2 + 7x - 1) \qquad \text{Proprietà distributiva}$$

Nella pratica, il passaggio intermedio si fa mentalmente e si scrive direttamente la scomposizione:

$$20x^5 + 35x^4 - 5x^3 = 5x^3(4x^2 + 7x - 1)$$

Negli esempi fin qui presentati abbiamo raccolto, fra i termini del polinomio originario, un *monomio*; tuttavia è possibile raccogliere anche un *polinomio*.

ESEMPIO Raccoglimento totale di un polinomio

Scomponiamo il polinomio $2x(x + 1) - 3(x + 1)$.

$$2x\underline{\underline{(x + 1)}} - 3\underline{\underline{(x + 1)}} = \underline{\underline{(x + 1)}}(2x - 3)$$

È possibile raccogliere il fattore $(x + 1)$

RACCOGLIMENTO PARZIALE:

Si applica quando il fattor comune non si puo’ raccogliere per tutti i termini del polinomio , ma solo per gruppi di monomi (termini). In tal caso il numero dei termini del polinomio deve essere pari.

AX + A Y + BX + B Y = A (X + Y) + B(X+Y) = (X+Y)(A + B)

$$3a + 3b + ax + bx = 3(a+b) + x(a+b) =$$

$$= (a+b) + (3+x)$$

$$\underbrace{x^2 - xy}_{\substack{\text{si può}\\ \text{raccogliere}\\ x}} \quad \underbrace{-x + y}_{\substack{\text{si può}\\ \text{raccogliere}\\ -1}} = \underbrace{x(x-y) - 1(x-y)}_{\substack{\text{si può}\\ \text{raccogliere}\\ (x-y)}} = (x-y)(x-1)$$

SCOMPOSIZIONE MEDIANTE PRODOTTI NOTEVOLI

SCOMPOSIZIONE DI BINOMI :

1. Scomposizione di una differenza di quadrati:

$$\boxed{A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)}$$

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

→ è una differenza di quadrati perché x^2 è il quadrato di x

9 è il quadrato di 3 perchè $\sqrt{9} = 3$

$25y^4 - 4x^2 = (5y^2 + 2x)(5y^2 - 2x)$

→ è una differenza di quadrati perché $25y^4$ è il quadrato di $5y^2$

$4x^2$ è il quadrato di $2x$

Osservazione: una somma di quadrati è irriducibile (non si può scomporre)

$x^2 + 1$, $x^2 + 9$, $x^2 + 25$…………….non si possono scomporre

2. Scomposizione di una differenza di cubi:

$$\boxed{A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)}$$

$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

è una differenza di cubi perché x^3 è il cubo di $x \rightarrow A = x$

8 è il cubo di $2 \rightarrow B = 2$

$8x^9 - 27 = (2x^3 - 3)(4x^6 + 6x^3 + 9)$

è una differenza di cubi perché $8x^9$ è il cubo di $2x^3 \rightarrow A = 2x^3$

27 è il cubo di $3 \rightarrow B = 3$

3. Scomposizione di una somma di cubi:

$$\boxed{A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)}$$

$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

è una somma di cubi perché x^3 è il cubo di $x \rightarrow A = x$

8 è il cubo di $2 \rightarrow B = 2$

$8x^9 + 27 = (2x^3 + 3)(4x^6 - 6x^3 + 9)$

è una somma di cubi perché $8x^9$ è il cubo di $2x^3 \rightarrow A = 2x^3$

27 è il cubo di $3 \rightarrow B = 3$

SCOMPOSIZIONE DI TRINOMI

1. Scomposizione di un quadrato di binomio:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

è un quadrato di binomio perché è un trinomio in cui ci sono i due quadrati x^2 è 9 (entrambi con segno positivo) rispettivamente di x e 3 e l'altro termine 6x è il doppio prodotto di x e 3 cioè 3·x· 2

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

è un quadrato di binomio perché è un trinomio in cui ci sono i due quadrati x^2 è 9 (entrambi con segno positivo) rispettivamente di x e 3 e l'altro termine 6x è il doppio prodotto di x e 3 cioè 3·x· 2, ma poiché abbiamo – 6x allora sarà $(x - 3)^2$

$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

è un quadrato di binomio perché è un trinomio in cui ci sono i due quadrati $4x^2$ è 9 (entrambi con segno positivo) rispettivamente di 2x e 3 e l'altro termine 12x è il doppio prodotto di 2 x e 3 cioè 2x·3· 2

Esempi di trinomi <u>che potrebbero</u> sembrare quadrati di trinomi <u>ma non lo sono</u>:

$x^2 + 14x + 9$ ***non è un quadrato di binomio poiché pur essendoci i quadrati x^2 e 9***
il termine 14x non è il doppio prodotto di 3 e x……………….

$x^2 + 6x - 9$ ***non è un quadrato di binomio poiché pur essendoci i quadrati x^2 e 9***
e il doppio prodotto di 3 e x, cioe' 6x , uno dei quadrati ha segno negativo

Nota: $-\ x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x + 3)^2$

2. Scomposizione di un trinomio SPECIALE DI II GRADO:

Ogni trinomio del tipo **$x^2 + s\,x + p$** per il quale si possono determinare due numeri a e b tali che $a + b = s$ e $a \cdot b = p$ si puo' scomporre secondo la formula:

$$x^2 + (a+b)x + a \cdot b = (x + a)(x + b)$$

Esempio:

Dato il trinomio $x^2 + 5x + 6$ dobbiamo cercare due numeri la cui somma sia 5 e il prodotto sia 6…………….

Tali numeri sono 2 e 3 allora il termine 5x lo posso scrivere come somme di 2x e 3x:

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 =$ posso applicare il raccoglimento parziale

tra i primi due termini raccolgo x e tra il II e III termine il 3

$= x\,\mathbf{(x + 2)} + 3\,\mathbf{(x + 2)} =$ posso raccogliere il fattor (x + 2)

$= (x + 2)(x + 3)$

Es. Scompongo $x^2 - 5x + 6$ non ci sono fattori comuni, non è un quadrato di binomio perché anche se c'è x^2 ….il 6 non è un quadrato.

Vediamo se ci sono due numeri tali che la loro somma sia -5 e il loro prodotto sia $+6$.

I due numeri si cercano tra le coppie di numeri il cui prodotto è il termine noto 6 del polinomio.

(1; 6) (2; 3) (- 1; - 6) (-2; - 3) (1; - 6)……..

Non è la coppia (1; 6) perche la loro somma $1 + 6 = 7$

Non è la coppia + 2 e + 3, perché la loro somma non dà -5, ma $+5$………………………

I numeri cercati sono -2 e -3 in quanto il loro prodotto è $+6$ e la loro somma è -5.

Allora $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$