1. EQUAZIONI DI PRIMO GRADO (LINEARI) IN UN' INCOGNITA

Si chiama **equazione** un'uguaglianza fra due espressioni letterali , per la quale si cercano i valori da attribuire alle lettere, dette **incognite**, per renderla vera.

Esempio: l'equazione $\underbrace{7x - 4}_{\text{I membro}} = \underbrace{3}_{\text{II membro}}$ (1)

è verificata per x = 1

infatti, se nella (1) sostituiamo ad x il numero 1, otteniamo che l'uguaglianza è verificata:

$$7 \cdot 1 - 4 = 3$$

$$\mathbf{3 = 3}$$

- Le espressioni che compaiono a sinistra e a destra dell'uguale vengono chiamate rispettivamente **primo membro** e **secondo membro** dell'equazione.

- I valori (numeri) che sostituiti alle lettere verificano l'uguaglianza vengono chiamati **soluzioni o radici dell'equazione**.

- Si dice **grado di un'equazione** l'esponente massimo con cui compare l'incognita x.

-Le equazioni di primo grado vengono dette **equazioni lineari**.

<u>Soluzioni di un'equazione</u>: Un'equazione si dice:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni (nel caso di un'equazione di primo grado è una sola);

-**indeterminata** se ha infinite soluzioni;

- impossibile se non ammette soluzioni.

Tipi di equazioni: le equazioni possono essere:

Numeriche: oltre l'incognita, contengono solo numeri;

Letterali: oltre l'incognita, contengono altre lettere;

Intere: l'incognita è presente solo al numeratore;

Fratte: l'incognita è presente anche al denominatore;

Esempi:

numerica intera	**Numerica fratta**	**Letterale intera**	**Letterale Fratta**	**Letterale fratta**
$\frac{1}{2}x = \frac{x+3}{5}$	$\frac{1}{x} = 2 - x$	$ax = \frac{1}{2}$	$\frac{a}{x} = b$	$\frac{a}{x} = b$

2. PRINCIPI DI EQUIVALENZA:

Due equazioni contenenti la stessa incognita sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Esempio: x + 5 = 9 e **x - 4 = 0** sono equivalenti perchè entrambe hanno come unica soluzione **4**.

Come risolvere le equazioni:

•Non esiste un metodo unico per la risoluzione di tutti i tipi di equazioni. Vi sono però due principi di equivalenza che hanno validità di carattere generale.

Primo principio di equivalenza delle equazioni:

"***Data un'equazione, se si aggiunge (o si toglie) ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente".***

Esempio: ***3x + 2 = 7*** è equivalente a

3x + 2 **− 2** = 7 **− 2** (tolgo 2 ad ambo i membri)

Dal primo principio discendono due regole:

- **Regola del trasporto.** È possibile spostare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio: data l'equazione **2x – 5 = x + 6** posso aggiungere al I e II membro il numero 5 ed ottengo:

2x − 5 **+ 5** = x + 6 **+ 5** ovvero **2x = x + 6 + 5** , quindi il − 5 passando dal I membro al II membro ha cambiato il segno.

- **Regola di cancellazione**. E’ possibile eliminare due termini uguali che compaiono uno nel primo membro e l’altro nel secondo.

Esempio: $2x - 4 \cancel{+ 2} = x \cancel{+ 2}$

Secondo principio di equivalenza delle equazioni:

“**Data un’equazione, se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numero o espressione diversi da 0, si ottiene un'equazione equivalente”.**

Esempio: 3x = 5 è equivalente a $\frac{3x}{3} = \frac{5}{3} \longrightarrow x = \frac{5}{3}$

Dal secondo principio discendono due regole.

- **Regola della divisione per un fattore comune**.

Se tutti i termini di un’equazione hanno un fattor comune, si possono dividere tutti i termini per tale fattore, ottenendo un’equazione equivalente.

Esempio:

6x – 10 = 12 posso divedere tutti i termini per **2** $\frac{6x}{2} - \frac{10}{2} = \frac{12}{2} \longrightarrow 3x - 5 = 6$

- Regola del cambiamento del segno:

Moltiplicando entrambi i membri di un'equazione per − 1 è possibile cambiare segno a tutti i termini, ottenendo un'equazione equivalente.

• **ESEMPIO** $-3x + 2 = +5$

$$\downarrow$$

$+3x - 2 = -5$

3. LE EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

Sono equazioni di I grado tutte quelle che si possono ricondurre alla forma ax = b.

- se a ≠ 0 l'equazione ammette soluzione x = b/a

- se a = 0 e b = 0 l'equazione è indeterminata, ovvero ogni numero è soluzione.

- se a = 0 e b ≠ 0 l'equazione è impossibile cioè non ammette soluzione.

Risoluzione di un'equazione numerica a coefficienti interi:

Esempio 1. Risolviamo l'equazione

$$3x + 2 = x - 1$$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

$3x - x = -2 - 1$ addizioniamo i termini simili:

$2x = -3$ dividiamo tutte e due i membri per 2

$\frac{2x}{2} = \frac{-3}{2}$ **otteniamo come soluzione:**

$x = -\frac{3}{2}.$

L'equazione ha una sola soluzione, cioè – 3/2 ed è **determinata.**

Esempio 2. Risolviamo l'equazione

$$3x - 2 - 2x + 3 = x + 1$$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

$3x - 2x - x = 2 - 3 + 1$ addizioniamo i termini simili

$0.x = 0.$

Poiché qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0, l'equazione ha infinite soluzioni. In tal caso diciamo che l'equazione è **indeterminata**.

Esempio 3. Risolviamo l'equazione:

$$3x - 1 = 3(x - 1)$$

Eseguiamo la moltiplicazione al II membro:

$3x - 1 = 3x - 3$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

$3x - 3x = 1 - 3$ addizioniamo i termini simili

$0x = -2$, ovvero, poiché nessun numero moltiplicato per zero dà – 2 , l'equazione non ha soluzione e diciamo che è **impossibile.**

($0x = -2 \rightarrow 0 = -2$ uguaglianza falsa → equazione impossibile)

4. Risoluzione di equazioni numeriche a coefficienti fratti.

Risolviamo l' equazione:

$$\frac{2x+1}{2} - \frac{2}{3} = 2x + \frac{5}{6}$$

Calcoliamo il m.c.m. dei denominatori, nel nostro caso **m.c.m(2,3,6)=6** e scriviamo tutti i termini dell'equazione con denominatore 6:

$$\frac{3(2x+1)}{6} - \frac{2.(2)}{6} = \frac{6.(2x)}{6} + \frac{5}{6}$$ ossia:

Otteniamo: $$\frac{6x+3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{12x}{6} + \frac{5}{6}$$

E moltiplicando tutto per 6 (applico il secondo principio), i denominatori possono essere tolti e rimane da risolvere l'equazione intera:

6x + 3 – 4 = 12x + 5

Trasportiamo tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

6x – 12x = 5 – 3 + 4 addiziono i termini simili

− 6x = 6 divido per – 6 tutte e due i membri: $\mathbf{\frac{-6x}{-6} = \frac{6}{-6}}$ ed otteniamo:

x = − 1. L'equazione è **determinata.**

Esercizi A: Risolvi le seguenti equazioni Trasportando tutti i termini contenenti l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro, tenendo presente che quando spostiamo un termine da un membro all'altro bisogna cambiare il suo segno.

1) 5x – 11 – 4x = − 10 [1]
2) 4x – 3 = 3x – 1 [2]
3) 16x + 5 = 15x – 10 [− 15]
4) 4x + 4 = 1 + x [− 1]
5) 3x + 3 = 3x + 5 [impossibile]
6) 4x + 3 = 3x + x + 3 [indeterminata]
5) x + 2 – (11 – x) + 4 = 3 – (x – 8) + 2(x – 8) [0]
6) 3 – (2+x) – 3 + 5x = x + 2x – 7 [− 5]
7) 5(x – 3) – 2(3x – 1) = 3(1 – 4x) [16/11]

Per ~~la~~ n. ~~1 e la~~ n. 2 verifica la soluzione

Esercizio B: Risolvi le seguenti equazioni, dove bisogna sviluppare quadrati di binomio, ricordando la regola: $\boldsymbol{(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2}$

1) $(x + 5)^2 = (x+5)(x – 5)$ [- 5]
2) $(x+2)^2 = (x – 1)^2 + 2x – 1$ [- 1]
3) $(x+1)^2 + 2x + 3 = (x + 2)(x – 2)$ [- 2]

Esercizio C) Risolvi le seguenti equazioni riconducendo tutti i termini allo stesso denominatore:

1) $\mathbf{\frac{x+1}{6} - \frac{4+5x}{12} = 0}$ [- 2/3]

2) $\mathbf{\frac{2x-5}{12} = \frac{x+1}{6} - \frac{1}{3}}$ [impossibile]

3) $\mathbf{\frac{2x-5}{3} + \frac{x+10}{2} = x - \frac{x-12}{4}}$ [- 4/5]

Disequazioni lineari (di I grado):

Si chiama disequazione una disuguaglianza fra due espressioni letterali , per la quale si cercano i valori da attribuire alle lettere, dette incognite, per renderla vera.

Le disequazioni lineari in un'incognita x sono tutte quelle che si possono ricondurre alla forma (normale):

$ax > b$ oppure $ax \geq b$ oppre $ax < b$ oppure $ax \geq b$

dove i simboli:

$<$ significa "minore" ; $>$ significa "maggiore"

$\leq$ "minore o uguale" ; $\geq$ maggiore o uguale"

Per le disequazioni valgono gli stessi principi visti per le equazioni: primo principio di equivalenza, legge del trasporto, legge di cancellazione……….

Fa' eccezione il II principio: quando, in una disequazione, moltiplichiamo o dividiamo tutti i termini PER UN NUMERO NEGATIVO IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE CAMBIA

Esempio: **moltiplico per − 1**

$-\ \mathbf{2x} > \mathbf{5}$ è equivalente a $\mathbf{2x} < \mathbf{-5}$

<u>**Risoluzone di disequazioni di primo grado in un'incognita**</u>

Le disequazioni di I grado si risolvono come le equazioni di primo grado, applicando la legge del trasporto….; l'unica cosa che cambia è che se la x è negativa (cioè ha il segno meno davanti), bisogna cambiare il segno a tutti i termini e invertire il verso della disuguaglianza.

Soluzioni di una disequazione: Una disequazione può essere verificata per determinati intervalli di valori; può anche essere **sempre verificata**; può anche essere **mai verificata.**

Vediamo alcuni esempi:

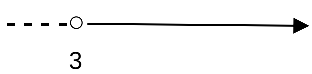
Esempio 1: Risolviamo la disequazione:

$4x + 3 > 3x + 6$ applico la legge del trasporto porto i termini con la x a sinistra del >
e i termini noti a destra, cambiando il segno ai termini che sposto

$4x – 3x > 6 – 3$ sommo ottengo le soluzioni:

$x > 3$ → sono soluzioni tutti i numeri più grandi del numero 3. Quindi:

le soluzioni individuano l'intervallo (3; +∞) e la rappresentazione grafica delle soluzioni è:



$x > 3$

Esempio 2: Risolvere la disequazione:

$4\cdot(3-2x)+3<4-5\cdot(3-2x)$ eseguo le operazioni

$12-8x+3<4-15+10x$ ottengo (trasporto)

$-8x-10x<4-15-3-12$ ottengo

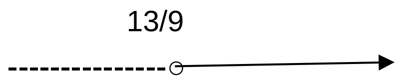
$-18x<-26$

quando ottengo come coefficiente della x un numero negativo moltiplico per – 1, cioè cambio di segno i termini e **inverto** il **verso** della disequazione:

$18x>26$ divido per 18 e ottengo le soluzioni:

$x>26/18 \longrightarrow x>13/9$. l’intervallo delle soluzioni è $(13/9, +\infty)$

e la rappresentazione grafica delle soluzioni è:



Esempio di disequazione *sempre verificata:*

$4-x>3-x$ risolviamo

$x-x>3-4$ cioè

$0\cdot x>-1$ cioè **$0>-1$** che è una disuguaglianza **vera.** Concludiamo che la disequazione è **sempre verificata** e in simboli scriviamo: $\forall x\in R$ (che significa che ogni numero reale è soluzione). Essa individua l’intervallo $(-\infty;+\infty)$. La rappresentazione grafica è una linea continua:

Disequazioni mai verificate o impossibili:

Esempio 1) **$x-3>1+x$**

Risolviamo applicando la legge del trasporto:

$x-x>1+3 \longrightarrow 0.x>4 \rightarrow 0>4$ è una disuguaglianza falsa e concludiamo che la disequazione **non ammette soluzioni** e in simboli scriviamo:

$\nexists x\in R$. La rappresentazione grafica è una linea tratteggiata:

4. Risoluzione di disequazioni numeriche a coefficienti fratti: (la x non compare al denominatore ma ci sono numeri fratti, ossia denominatori numerici):

Risolviamo la disequazione: $\frac{2x+1}{2}-\frac{2}{3}>2x+\frac{5}{6}$

Calcoliamo il m.c.m. dei denominatori, nel nostro caso **m.c.m(2,3,6)=6** e riduciamo tutte le frazioni allo stesso denominatore:

$$.\frac{6x+3-4}{6}>\frac{12x+5}{6}$$

Applicando **il secondo principio di equivalenza**, moltiplichiamo tutte e due i membri per il denominatore comune 6, **i denominatori li eliminiamo** e rimane da risolvere la disequazione intera:

$6x + 3 – 4 > 12x + 5$

Trasportiamo tutti i termini contenenti l’incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro:

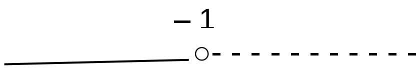
$6x – 12x > 5 – 3 + 4$ addiziono i termini simili e ottengo

$-6x > 6$

Poiché la x ha coefficiente negativo, la rendo positiva, ovvero cambio tutto di segno e inverto il verso della disequazione e ottengo: $6x < -6$

divido per 6 tutte e due i membri: $\frac{6x}{6}<\frac{-6}{6}$ ed otteniamo: **$x < -1$**

Quindi sono soluzione dell’equazione tutti i numeri minori (cioè più piccoli) di – 1. Rappresentando graficamente questo intervallo di soluzioni:



Risolvere la seguente disequazione **$(2x – 1)^2 – 3(2 + x) \le (2x + 3)(2x – 3) + 2(x+3)$**

Ricordando la formula del **quadrato di binomio** $(a\pm b)=a^2\pm 2ab+b^2$ e s**omma per differenza** $(a+b)(a-b) = a^2– b^2$,

si ha che $(2x – 1)^2 = 4x^2 – 4x + 1$ e $(2x + 3)(2x – 3) = 4x^2 – 9$ e la disequazione diventa:

$4x^2 – 4x + 1 – 6 – 3x \le 4x^2 – 9 + 2x + 6$

Per la legge di cancellazione posso eliminare $4x^2$ sia al I che al II membro e si ottiene:

$– 4x + 1 – 6 – 3x \le – 9 + 2x + 6$

Applicando la legge del trasporto si ottiene:

$– 4x – 3x – 2x \le – 9 + 6 – 1 + 6$ e sommando:

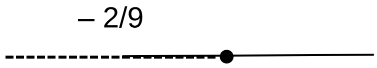
$– 9x \le + 2$

Poiché la x è negativa, si cambia tutto di segno e si inverte il verso della disequazione:

$9x \ge – 2$ si divide per 9 e si ottiene:

$$x \geq -\frac{2}{9}$$

Graficamente



Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni di I grado:

Risolvere graficamente l' equazione $4x - 2 = 2x + 2$

Portiamo tutto a I membro: $4x - 2 - 2x - 2 = 0$ e sommando i termini simili si ottiene:

$$2x - 4 = 0$$

Considero la funzione **$y = 2x - 4$** (è una funzione lineare perché di I grado), che rappresenta graficamente un retta e rappresento la retta nel piano cartesiano (ricordiamo che per due punti passa una sola retta e, quindi per rappresentarla basta trovare 2 suoi punti e congiungere i due punti in linea retta).

Diamo valori a scelta alla x troviamo il corrispondente valore di y:

Per $x = 0$ $y(0) = 2.0 - 4 = -4 \rightarrow$

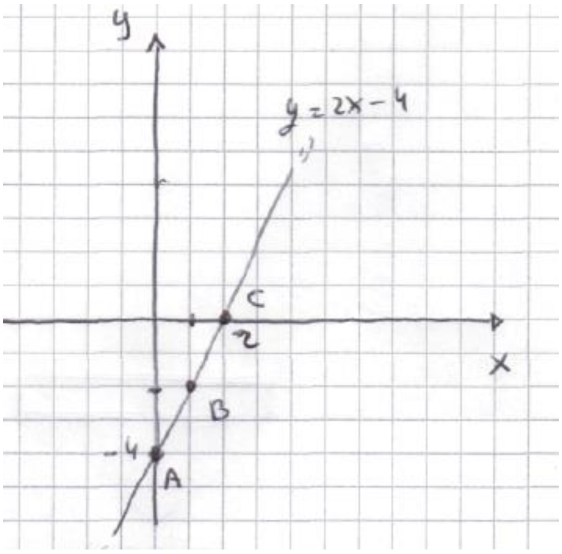
Per $x = 1$ $y(1) = 2.1 - 4 = 2 - 4 = -2$

Per $x = 2$ $y(2) = 2.2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Ovvero costruisco la tabella di valori →

x	y
0	– 4
1	– 2
2	0

Considero i punti: A(0; – 4), B(1; – 2), C (2; 0) e li rappresento nel piano cartesiano ed essi stanno su una stessa retta:



La soluzione dell'equazione $2x - 4 = 0$ è l'ascissa del punto in cui la retta di equazione $y = 2x - 4$ incontra l'asse delle x, ovvero il numero 2;

Se avessi dovuto risolvere graficamente la disequazione $2x - 4 > 0$, rappresentando la retta di equazione $y = 2x - 4$, i punti della retta hanno la $y > 0$ (il grafico della retta si trova al di sopra dell'asse delle x) **per $x > 2$**;

Se avessi dovuto risolvere la disequazione $2x - 4 < 0$,
La retta di equazione $y = 2x - 4$ ha i punti con ordinata negativa ($y < 0$) , dove il suo grafico si trova al di sotto dell'asse delle x, ossia **per $x < 2$**

Esercizio: Risolvi graficamente (e anche algebricamente) le seguenti equazioni e disequazioni di I grado:

1) $2x - 3 = 0$ 2) $3x + 6 = 0$ 3) $-2x + 4 = 0$
4) $3x - 6 < 0$ 5) $-2x + 4 > 0$

DAL PROBLEMA ALLE EQUAZIONI

- Tradurre le informazioni fornite dal problema in equazioni

<u>Problemi numerici</u>:

Esempio 1: Determina quel numero che sommato alla sua terza parte è uguale al triplo del numero aumentato di 1.

Il numero che non conosciamo lo indichiamo con la lettera x (detta appunto incognita)

Dati del problema: la terza parte di un numero si ottiene dividendolo per il numero 3 → $\frac{x}{3}$;

il triplo di un numero si ottiene moltiplicando per il numero 3 → 3x

Traducendo il problema in equazione si ottiene: $x + \frac{x}{3} = 3x + 1$ che è un'equazione

a coefficienti fratti e risolvendola si ottiene: $\frac{3x+x}{3} = \frac{9x+3}{3}$ → 3x + x - 9x = 3 →

− 5x = 3 → x = - 3/5

Esempio 2. Due numeri naturali sono tali che il secondo supera il primo di 2 e la somma tra il quadruplo del primo e il secondo è 27. Troviamo i due numeri.

Indichiamo con x il primo numero, l'equazione risolvente il problema sarà:

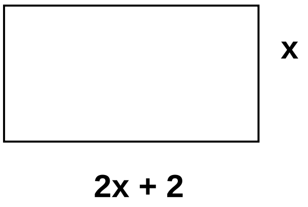
$$\underbrace{4x}_{\text{quadruplo del primo numero}} + \underbrace{(x+2)}_{\text{secondo numero}} = 27 \rightarrow 5x + 2 = 27 \rightarrow 5x = 25 \quad x = 25/5 = 5$$

Esempio 3. Determina quel numero x che sommato al suo successivo dà come risultato 15.

$$\underbrace{x}_{\text{numero}} + \underbrace{(x+1)}_{\text{successivo del numero x}} = 15 \rightarrow 2x = 15 - 1 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 14/2 = 7$$

<u>Problemi di tipo geometrico</u>:

Esempio 1) Determina le dimensioni di un campo rettangolare, sapendo che la base è il doppio dell'altezza aumentata di 2 cm e il perimetro è 28 cm.



Indicando con l'incognita x l'altezza, la base sarà 2x + 2 e calcolando il perimetro noto l'equazione risolvente il problema sarà:

2· base + 2· altezza = perimetro ovvero

$2 \cdot (2x + 2) + 2 \cdot x = 28$ risolvendo l'equazione:

$4x + 4 + 2x = 28 \rightarrow 4x + 2x = 28 - 4 \rightarrow 6x = 24 \rightarrow x = 24/6 = 4$

Quindi l'altezza è 4 e la base è 10.

<u>Esermpio 2.</u> Dividi un segmento lungo 56 cm in due parti delle quali una è i 4/3 dell'altra. Quali sono le lunghezze dei segmenti che si ottengono? [24 cm, 32 cm]

Indichiamo con x e y le lunghezze dei due segmenti. Un segmento è i 4/3 dell'altro

e supponiamo che sia quindi $y = \frac{4}{3}x$.

La somma dei due segmenti sarà uguale a 56 cm: $x + y = 56$ e potendo porre al posto di $y \rightarrow \frac{4}{3}x$ l'equazione diventa : $x + \frac{4}{3}x = 56$. Risolvendo l'equazione, si

moltiplica tutto per 3 : $3x + 4x = 56 \cdot 3 \rightarrow 7x = 168 \rightarrow x = 168/7 = 24$.

Il segmento $y = 56 - x = 56 - 24 = 32$ (oppure $y = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot 24 = 32$).

<u>Problemi dalla realtà</u>:

Esempio 2. Un televisore, dopo che è stato praticato uno sconto del 12% sul prezzo originario, è stato pagato 308 euro. Qual era il prezzo originario del televisore?

Indichiamo con x il prezzo originario del televisore;
sconto subito dal prezzo del televisore = 12% = 12/100
prezzo scontato = 308 euro

Quindi

prezzo originario meno il 12% del prezzo originario = prezzo scontato

$\mathbf{x - \frac{12}{100}x = 308}$ $\longrightarrow$ **essendo** $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ e l'equazione risolvente diventa:

$\mathbf{x - \frac{3}{25}x = 308}$ e risolvendo l'equazione moltiplicando tutti i termini per 25:

$25x - 3x = 308 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad 22x = 308 \cdot 25 \quad \rightarrow \quad x = \frac{308 \cdot 25}{22} = 350$

Esempio 3.

Carla e Anna sono due sorelle nate rispettivamente nel 1989 e nel 1997. In che anno Carla avrà il doppio dell'età di Anna?

Indichiamo con X l' età di Carla e con Y l'età di Anna. Tra loro ci sono 8 anni di differenza (1997 - 1989 = 8) e possiamo scrivere che:

età di Carla = età di Anna + 8 → $X = Y + 8$ (1)

Cosa accade quando $X = 2Y$? Quanti anni avrà Anna? Basta sostituire nell'equazione (1) al posto di $X \rightarrow 2Y$ e si ottiene: $2Y = Y + 8$ che ci consente di determinare l'età di Anna quando Carla avrà il doppio dell'età di Anna:

$2Y - Y = 8 \rightarrow Y = 8$. Siamo nell'anno 1997 + 8 = 2005.