EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Spesso può capitare di trovarsi davanti ad un'equazioni di grado **superiore al secondo** (terzo, quarto ecc.) e non sapere come fare per risolverla, dato che solitamente si studia la formula risolutiva soltanto per equazioni fino al secondo grado. Sono state trovate formule risolutive per equazioni di terzo e quarto grado mentre è stato dimostrato che per le equazioni di grado 5 o superiore non è possibile trovare una formula generale che fornisca le soluzioni. Questo non vuol dire che le soluzioni non ci siano (anzi, per il **teorema fondamentale dell'algebra** sappiamo che ci sono) ma che non si possono trovare in generale con semplici operazioni aritmetiche.

In alcuni casi si possono sfruttare alcune accortezze per risolvere semplicemente equazioni di grado superiore al secondo senza aver bisogno di nuovi strumenti teorici ma sfruttando le cose che sappiamo già.

LE EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO SONO EQUAZIONI RICONDUCIBILI ALLA FORMA

Pn(x)= 0,

dove Pn(x) è un polinomio nell' incognita x di grado n > 2

Vedremo come si risolvono alcuni tipi di equazioni di grado superiore al secondo:

- **EQUAZIONI MONOMIE**
- **EQUAZIONI BIMOMIE**
- **EQUAZIONI TRINOMIE**
- **EQUAZIONI BIQUADRATICHE**
- **EQUAZIONI RISOLVIBILI CON ALCUNE TECNICHE DI SCOMPOSIZIONE**

EQUAZIONI MONOMIE:

SONO EQUAZIONI RICONDUCIBILI ALLA FORMA

$$ax^n = 0$$

dove a è un numero reale diverso da zero (scriviamo $a \in R - \{0\}$)

L'esponente n è un numero naturale non nullo (scriviamo $n \in N - \{0\}$)

Esse hanno n soluzioni tutte uguali a zero.

Esempi di equazioni monomie:

$2x^3 = 0$ $\quad\quad$ $\frac{3}{4}x^5 = 0$ $\quad\quad$ $-5x^6 = 0$

EQUAZIONI BINOMIE:

Sono riconducibili alla forma:

SONO EQUAZIONI RICONDUCIBILI ALLA FORMA

$$ax^n + b = 0$$

dove a è un numero reale diverso da zero (scriviamo $a \in R - \{0\}$)

L'esponente n è un numero naturale non nullo (scriviamo $n \in N - \{0\}$)

Isolando la x^n al primo membro, applicando la legge del trasporto si ha:

$ax^n = - b$ dividendo tutto per $a \neq 0$

le equazioni binomie si possono scrivere nella forma

$x^n = -\frac{b}{a}$ e per determinarne le soluzioni si distinguono i casi riassunti nello schema seguente:

Se n è dispari, l'equazione ammette sempre come unica soluzione la radice ennesima di $-\frac{b}{a}$: $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

Esempio:

$2x^3 + 1 = 0 \rightarrow 2x^3 = -1 \rightarrow x^3 = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

n = 3 dispari

Se n è pari:

- Se $-\frac{b}{a} < 0$, l'equazione non ammette soluzioni reali perché una potenza con esponente pari non è mai negativa, non esiste la radice ad indice pari di un numero negativo

Esempio:

$7x^6 + 5 = 0 \rightarrow 7x^6 = -5 \rightarrow x^6 = -\frac{5}{7} \rightarrow$ impossibile

n = 6 pari

< 0

- <u>Se</u> $-\frac{b}{a} > 0$, l'equazione ammette le due soluzioni reali ed opposte:

$$x = \pm \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

<u>Esempio:</u>

$16x^4 - 1 = 0 \rightarrow \quad 16x^4 = 1 \rightarrow \quad x^4 = \frac{1}{16} \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \pm\frac{1}{2}$

n = 4 pari

> 0

<u>video equazioni binomie 1</u>

EQUAZIONI RICONDUCIBILI A BINOMIE:

sono della forma $[f(x)]^n = b$ con b numero reale e n numero naturale non nullo.

Esempi:

a) $(2x - 1)^3 = 8$ estraggo la radice cubica (ad indice 3 ad ambo i menbri

$\sqrt[3]{(2x-1)^3} = \sqrt[3]{8}$ 8 si può scomporre $8 = 2^3$

$\sqrt[3]{(2x-1)^3} = \sqrt[3]{2^3}$ l'esponente 3 si semplifica con l'indice 3 della radice e la radice se ne và

$2x - 1 = 2$ è un'equazione di primo grado che si risolve con la legge del trasporto

$2x = 2 + 1 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow$ divido tutto per 2 $\frac{2x}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

b) $(x - 1)^4 = 2$ estraggo la radice ad indice 4 di ambo i membri mettendo ± essendo 4 un indice pari

$\sqrt[4]{(x-1)^4} = \pm \sqrt[4]{2}$ la radice se ne và semplificando l'indice con l'esponente

$x - 1 = \pm \sqrt[4]{2} \rightarrow x = 1 \pm \sqrt[4]{2}$

c) $\mathbf{2 (x + 1)^8 + 100 = 0}$ porto 100 dopo l'uguale….

$\mathbf{2 (x + 1)^8 = - 100}$ divido tutto per 2 e ottengo

$\mathbf{(x + 1)^8 = - 50}$ **dovrei estrarre la radice ad indice pari 8 a tutte e due i membri**

$\sqrt[8]{(x+1)^8} = \sqrt[8]{-50}$ ma non esiste la radice ad indice pari di un numero negativo, l'equazione è impossibile e scriviamo che l'insieme delle soluzioni $S = \emptyset$, dove con il simbolo $\emptyset$ si indica l'insieme vuoto, ovvero l'insieme che non ha elementi.

Per indicare che non ci sono soluzioni si scrive anche $\nexists\, x \in R$.

VIDEO EQUAZIONI BINOMIE 2

EQUAZIONI TRINOMIE e BIQUADRATICHE.

Un' equazione nell'incognita x si dice **TRINOMIA** se è riconducibile alla forma:

$$a\,x^{2n} + bx^{n} + c = 0 \qquad (1)$$

dove a,b,c sono numeri reali non nulli ed n è un numero intero positivo.

Se n = 1 un' equazione si riduce a un'equazione di secondo grado che sappiamo risolvere con la formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$

Se n = 2 , l' equazione trinomia è di quarto grado, della forma:

$a\,x^{4} + bx^{2} + c = 0$ e viene detta **EQUAZIONE BIQUADRATICA**

Le equazioni trinomie, per n ≥ 2, si possono ricondurre alla risoluzione di equazioni di II grado mediante la sostituzione:

$$x^n = t$$

infatti, ponendo $x^n = t$ si ha che $x^{2n} = (x^n)^2 = t^2 \longrightarrow x^{2n} = t^2$

e l'equazione trinomia (1) si trasforma nell'equazione:

$$a\,t^2 + b\,t + c = 0 \qquad (2)$$

che è un'equazione di II grado nella variabile t.

Se l'equazione (2) non ha soluzioni reali, anche l'equazione originaria (1) è priva di soluzioni reali.

Se, invece, la (1) ammette soluzioni reali, che indichiamo con t_1 e t_2 , le soluzioni dell'equazione originaria sono le soluzioni delle due equazioni binomie:

$x^n = t_1$ e $x^n = t_2$

(se $\Delta = 0$, $t_1 = t_2$ e si ha una sola equazione binomia da risolvere)

Esempi di risoluzione di equazioni biquadratiche:

a) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ si pone x2 = t quindi al posto di x^2 metto t e al posto di x^4 metto t^2 e l'equazione diventa:

$2t^2 - t - 1 = 0$ che è un'equazione di II grado nella variabile t che risolviamo con la formula nota delle equazione di secondo:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di II grado nella variabile t sono:

$t_1 = 1$ e $t_2 = -\frac{1}{2}$

Ma noi vogliamo le soluzioni nella variabile x, e avendo posto **$x^2 = t$,** si risolvono le due equazioni binomie:

$x^2 = -\frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ impossibile perché **non si può calcolare la radice quadrata di un numero negativo**

$x^2 = 1$ $\rightarrow$ **$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$**

Quindi le soluzioni dell'equazione biquadratica sono ± 1

[VIDEO EQUAZIONI BIQUADRATICHE]()

Esempi di risoluzione di EQUAZIONI TRINOMIE:

A) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ è un'equazione trinomia perché ha tre termini: l' esponente dell'incognita del primo termine è il doppio dell'esponente dell' incognita del II termine.

La sostituzione da fare è $t = x^4$ (ne segue che $t^2 = x^8$) e sostituendole nell'equazione al posto delle rispettive x…si ottiene un'equazione di II grado nella variabile t:

$t^2 - 17t + 16 = 0$ che si risolve con la formula:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2-4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{17\pm\sqrt{289-64}}{2} =$$

$$= \frac{17\pm\sqrt{225}}{2} = \frac{17\pm15}{2} = \begin{cases} \frac{32}{2} = 16 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni in t sono: t = 16 v t = 1

Poiché vogliamo le soluzioni nella variabile x, avendo posto $x^4 = t$ si devono risolvere le due equazioni binomie:

$x^4 = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm \sqrt[4]{2^4} = \pm 2$

$x^4 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$

Le soluzioni del''equazione trinomia sono ± 2 v ± 1

B) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ è un' equazione trinomia perché ha tre termini: un termine noto e l'esponente dell'incognita del I termine è il doppio dell'esponente dell'incognita del II termine

La sostituzione da fare è $t = x^3$ (ne segue che $t^2 = x^6$) e sostituendole nell'equazione al posto delle rispettive x…si ottiene un'equazione di II grado nella variabile t:

$t^2 + 19t - 216 = 0$ che si risolve con la formula:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-19 \pm \sqrt{(19)^2-4(1)(-216)}}{2(1)} = \frac{17 \pm \sqrt{361+864}}{2} =$$

$$= \frac{-19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-19 \pm 35}{2} = \begin{cases} \frac{16}{2} = 8 \\ -\frac{54}{2} = -27 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni in t sono: t = 8 v t = - 27

Poiché vogliamo le soluzioni nella variabile x, avendo posto $x^3 = t$ si devono risolvere le due equazioni binomie:

$x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

$x^3 = -27 \rightarrow x = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3$

Le soluzioni del''equazione trinomia sono 2 v - 3

[VIDEO EQUAZIONI TRINOMIE]

EQUAZIONI RISOLVIBILI CON ALCUNE TECNICHE DI SCOMPOSIZIONE

Vedere i due video:

Equazioni risolvibili mediante scomposizione parte 1

Equazioni risolvibili mediante scomposizione 2