EQUAZIONI DI II GRADO

EQUAZIONI DI II GRADO

Ogni equazione del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a, b e c sono numeri reali (detti coefficienti) e a sempre diverso da zero, viene chiamata equazione di secondo grado in forma normale.

Esempio: $2x^2 - 5x + 6 = 0$ $a = 2$ $b = -5$ $c = 6$ **(termine noto)**

Soluzione di un'equazione di II grado completa

Un' equazione di II grado $ax^2 + bx + c$ è completa quando i suoi coefficienti sono tutti diversi da zero $a,b,c \neq 0$.

Consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

- Se $b^2 - 4ac > 0$, l'equazione ha **due soluzioni reali distinte**, date dalla formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Se $b^2 - 4ac = 0$, l'equazione ha due **soluzioni reali coincidenti**, date dalla formula:

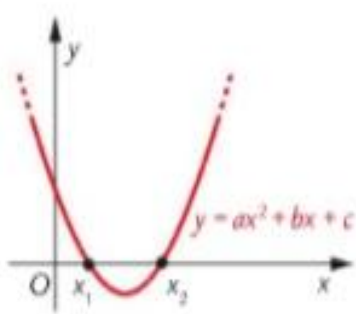
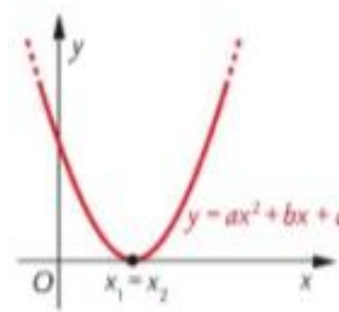
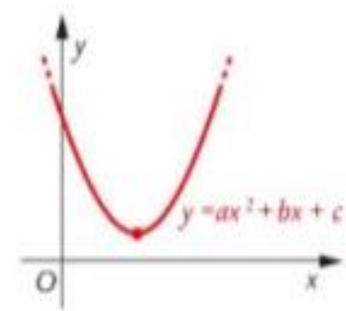
$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Se $b^2 - 4ac < 0$, l'equazione **non** ha soluzioni reali.

Il termine $\Delta = b^2 - 4ac$ viene detto discriminante

Interpretazione grafica di un’ equazione di II grado:

all’equazione di II grado **$ax^2 + bx + c = 0$** **si può associare la funzione di II grado** **$y = ax^2 + bx + c$**
che può essere rappresentata graficamente nel piano cartesiano e prende il nome di PARABOLA

Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Equazione $ax^2 + bx + c = 0$	Ha due soluzioni distinte: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	Ha due soluzioni coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	Non ha soluzioni reali
Interpretazione grafica dell’equazione (la figura si riferisce al caso in cui $a > 0$)			

PARABOLA (COMPLETA)

Equazioni numeriche intere complete

ESEMPIO

Risolviamo le seguenti equazioni.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. $8x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\underbrace{-3}_{b})^2 - 4 \cdot \underbrace{8}_{a} \cdot \underbrace{2}_{c} = 9 - 64 = -55$$

$\Delta < 0 \rightarrow$ non ci sono radici reali. L'equazione è impossibile.

b. $4 - x^2 + 3x = 0 \rightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1(-4) = 9 + 16 = 25 > 0 \rightarrow$ due radici reali e distinte,

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1, \\[2ex] x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4. \end{cases}$$

Le soluzioni sono -1 e 4.

c. $36x^2 - 10x = 25(2x - 1) \rightarrow 36x^2 - 10x = 50x - 25 \rightarrow 36x^2 - 60x + 25 = 0$

portiamo in forma normale

$\Delta = b^2 - 4ac = (-60)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 25 = 3600 - 3600 = 0 \rightarrow$ due radici reali e coincidenti,

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-60)}{2 \cdot 36} = \frac{\cancel{60}^{\,5}}{\cancel{72}_{\,6}} = \frac{5}{6}.$$

$\dfrac{5}{6}$ è la soluzione doppia dell'equazione.

Equazioni di II grado incomplete

Nelle equazioni di II grado $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ **(altrimenti diventa un' equazione di primo grado, mentre i coefficiente b e c possono mancare, cioè possono valere zero. Le equazioni di II grado incomplete si classificano nel seguente modo:**

Equazione monomia	$b=0$, $c=0$	$ax^2=0$
Equazione spuria	$b\neq 0$, $c=0$	$ax^2+bx=0$
Equazione pura	$b=0$, $c\neq 0$	$ax^2+c=0$
Equazione completa	$b\neq 0$, $c\neq 0$	$ax^2+bx+c=0$

EQUAZIONI DI II GRADO INCOMPLETE

Soluzioni di una equazione di secondo grado

INCOMPLETE

monomia $ax^2 = 0$ $\Rightarrow \frac{a}{a}x^2 = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

pura $ax^2 + c = 0$ $\Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow \frac{a}{a}x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

spuria $ax^2 + bx = 0$ $\Rightarrow x(ax+b) = 0$

- $x = 0$
- $ax + b = 0 \longrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Esempio equazione monomia:

$2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ **(tutte le equazioni monomie hanno due soluzioni reali coincidenti uguali a zero)**

Equazione monomia grafico

Esempio equazione pura:

I) $2x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \quad \rightarrow x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

II) $2x^2 + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = -8 \rightarrow x^2 = -\frac{8}{2} \quad \rightarrow x^2 = -4 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-4}$ **e**

poiché non esiste la radice quadrata di un numero negativo ovvero il quadrato di un numero non è mai negativo questa II equazione pura non ha soluzioni.

REGOLA SOLUZIONI EQUAZIONE PURA: un' equazione di II grado pura $ax^2 + c = 0$ ha due soluzioni reali uguali ed opposte date dalla formula

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

solo se a e c hanno segno discorde.

Equazione pura grafico

Esempio equazioni di II grado spurie (ammettono sempre due soluzioni di cui una è zero)

I) $4x^2 + 12x = 0$ **si può raccogliere la x e l'equazione si può scrivere come prodotto di due fattori di primo grado x e (4x + 12):**

$$x \cdot (4x + 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x + 12 = 0 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 12/4 = 3 \end{cases}$$

per la legge di annullamento di un prodotto:
"un prodotto è zero quando uno o entrambi i due fattori sono zero".

II) $$\frac{3}{4}x^2 = 2x \underset{\text{portiamo in forma normale}}{\rightarrow} \overbrace{\frac{3}{4}x^2 - 2x = 0}^{\text{equazione spuria}} \underset{\text{raccogliamo } x}{\rightarrow} x\left(\frac{3}{4}x - 2\right) = 0 \underset{\text{legge di annullamento del prodotto}}{\rightarrow} x = 0 \vee \left(\frac{3}{4}x - 2\right) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$$

Le soluzioni sono 0 e $\frac{8}{3}$.

Equazione di II grado spuria grafico

Esercizi libro di testo pag. 522

CHECKER Risolvi le seguenti equazioni.

72 $x^2-5x+6=0$ $[3;\ 2]$

73 $4x^2-7x+3=0$ $\left[\frac{3}{4};\ 1\right]$

74 $b^2+2b-3=0$ $[-3;\ 1]$

75 $x^2+16x+64=0$ $[-8 \text{ doppia}]$

76 $x^2+3x+6=0$ [impossibile]

77 $a^2+7a-60=0$ $[-12;\ 5]$

78 $3x^2+x-2=0$ $\left[\frac{2}{3};\ -1\right]$

79 $x^2+6x+8=0$ $[-2;\ -4]$

80 $9x+5x^2=2$ $\left[-2;\ \frac{1}{5}\right]$

81 $-x^2+2x-2=0$ [impossibile]

82 $(2-3x)x=\frac{1}{3}$ $\left[\frac{1}{3} \text{ doppia}\right]$

83 $6=\frac{x^2}{2}+2x$ $[-6;\ 2]$

84 $(t-3t^2)\cdot 12-1=0$ $\left[\frac{1}{6} \text{ doppia}\right]$

85 $\frac{x^2}{4}-x+\frac{1}{2}=0$ $[2\pm\sqrt{2}]$

86 $x^2-\frac{x}{6}-\frac{1}{3}=0$ $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right]$

87 $\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}\,x-8=0$ $[-2\sqrt{2};\ 4\sqrt{2}]$

88 $4x^2+\frac{5}{3}x-1=0$ $\left[-\frac{3}{4};\ \frac{1}{3}\right]$

89 $x^2-x-\frac{7}{4}=0$ $\left[\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}\right]$

90 $6x^2+x\sqrt{3}-1=0$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$

91 $\sqrt{2}\,x^2-3x-2\sqrt{2}=0$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2\sqrt{2}\right]$

92 $0{,}75x^2+0{,}5x-2=0$ $\left[-2;\ \frac{4}{3}\right]$

93 $x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$ $[2;\ \sqrt{3}]$

94 **ESEMPIO DIGITALE** $7x^2+2(3x-1)=x$

95 $-x^2+6(x-2)=0$ [impossibile]

96 $\frac{(x-2)(2+x)}{3}=x$ $[4;\ -1]$

97 $12(y^2-1)=-7y$ $\left[-\frac{4}{3};\ \frac{3}{4}\right]$

98 $2\sqrt{2}\,x=x^2+1$ $[\sqrt{2}\pm 1]$

99 $(3-2x)^2-(2-x)^2=0$ $\left[1;\ \frac{5}{3}\right]$

100 $10^3a^2-10^2a+10=10^2a$ $\left[\frac{1}{10} \text{ doppia}\right]$

101 $\sqrt{3}\,x(\sqrt{3}\,x-2)=-1$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ doppia}\right]$

102 **YOU & MATHS** **A square deal** Find all the numbers that are 930 less than their squares.

Risolvi le seguenti Equazioni di II grado incomplete:

1) $x^2 - 4 = 0$ [-2; 2]
2) $4x^2 - 25 = 0$ [- 5/2; + 5/2]
3) $8x^2 + 4 = 0$ [impossibile]
4) $4x^2 + 14x = 0$ [0; - 7/2]
5) $-15x^2 + 9x = 0$ [0; 9/15]
6) $x^2 - 9 = 0$ [- 3; 3]

CHECKER Risolvi le seguenti equazioni.

20 $x^2 - 6 = 0$ $[\pm\sqrt{6}]$

21 $x^2 + 36 = 0$ [impossibile]

22 $\frac{x^2}{\sqrt{5}} = 0$ [0 doppia]

23 $4x^2 - 16 = 0$ $[\pm 2]$

24 $-(1+\sqrt{2})x^2 = 0$ [0 doppia]

25 $3(x^2 + x) = 0$ $[0; -1]$

26 $5^{14}x^2 - 5^{12} = 0$ $\left[\pm\frac{1}{5}\right]$

27 $2x^2 = \frac{7}{2}x$ $\left[0; \frac{7}{4}\right]$

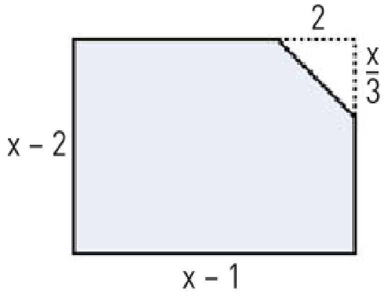
28 $-\sqrt{3}\,t^2 = -3$ $[\pm\sqrt[4]{3}]$

29 $-3\sqrt{21}\,x^2 = 0$ [0 doppia]

30 $2\sqrt{2}\,x^2 - \frac{3}{4}x = 0$ $\left[0; \frac{3\sqrt{2}}{16}\right]$

PROBLEMI ED EQUAZIONI DI II GRADO

57 Determina il valore di x tale che l'area della parte del rettangolo che in figura è colorata sia 2. $\left[\frac{10}{3}\right]$



58 Determina il valore di a tale che l'area del quadrato colorato sia 25. $[\sqrt{5}]$