Disequazioni di secondo grado

Le disequazioni di secondo grado sono tutte quelle che si possono ricondurre alla forma:

$$ax^2 + bx + c \gtreqless 0$$

dove > (maggire) , ≥ (maggiore o uguale), < (minore), ≤ (minore o uguale)

Esempi:

$2x^2 - x - 1 < 0;$ $\quad 4x^2 - 1 \geq 0;$ $\quad x^2 - 2x \leq 0$

$5x^2 \leq 0;$ $\quad x^2 + 1 > 0;$ $\quad \sqrt{3}x^2 - x \geq 0$

Vedremo due metodi per risolvere una disequazioni di II grado:
Il metodo analitico (algebrico) e il metodo grafico della parabola.

METOTO ANALITICO (algebrico):

Data la disequazione $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$

Se $a > 0$ e ≥ 0 $\vee$ $a < 0$ e ≤ 0 si parla di <u>concordanza</u>.

Se $a > 0$ e ≤ 0 $\vee$ $a < 0$ e ≥ 0 si parla di <u>discordanza</u>.

Quindi si ha rispettivamente concordanza o discordanza se il segno di "a" e il "verso" della disequazione sono uguali od opposti.

Esempi:

1) $2x^2 + x - 1 > 0$ concordanza $a = 2 > 0;$ disequazione > 0

2) $3x^2 - x \leq 0$ discordanza $a = 3 > 0;$ disequazione ≤ 0

3) $-x^2 + 5 \geq 0$ discordanza $a = -1 < 0;$ disequazione ≥ 0

4) $-3x^2 + 5x < 0$ concordanza $a = -3 < 0;$ disequazione < 0

Una disequazione di II grado $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$

Si risolve come se fosse un'equazione. Quindi si risolve l'equazione (detta associata alla disequazione)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad \Delta = b^2 - 4\,a\,b$$

Per l'equazione di avrà che:

- Se $\Delta > 0$ si avranno due soluzioni reali distinte x_1 e x_2 trovate con la formula:
- $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ con $x_1 < x_2$

- Se $\Delta = 0$ si avranno due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = x_0$

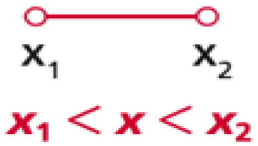
- Se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni reali per l'equazione $\nexists\ x \in R$

Le soluzioni della disequazione di II grado saranno:

1) Se $\Delta > 0$

Concordanza tra a e il verso della disequazione **VALORI ESTERNI**

Discordanza tra a e il verso della disequazione **VALORI INTERNI**



Se nel verso della disequazione c'è anche l'uguale, cioè abbiamo $\geq$ o $\leq$ per indicare i valori esterni scriveremo: $x \leq x_1$ v $x \geq x_2$ e il pallino nel grafico sarà pieno.
Per indicare i valori interni scriveremo $x_1 \leq x \leq x_2$ e il pallino nel grafico sarà pieno.

Esempi caso $\Delta > 0$

a) $x^2 - x - 2 \geq 0$ si risolve come se fosse un'equazione: $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ab}$ = (-1)2 – 4(1)(-2) = 1 + 8 = **9 >0**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \rightarrow \quad x1 = -1 \quad x2 = 2$$

concordanza

$a = 1 > 0;\quad$ disequazione $\geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 2$

Le soluzioni della disequazione sono valori esterni all'intervallo di estremi – 1 e 2

b) $2x^2 + x < 0$ risolvo l'equazione associata

$2x^2 + x = 0 \rightarrow x(2x + 1) = 0 \rightarrow$ **$x = 0$** v $2x + 1 = 0$

$\downarrow$

$2x = -1 \rightarrow$ **$x = -1/2$**

discordanza

$a = 2 > 0;\quad$ disequazione $< 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < 0$

Le soluzioni della disequazione sono valori interni all'intervallo di estremi 0 e - 1/2

2) $\Delta = 0$ l'equazione associata alla disequazione $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$

ha una sola soluzione $x_0 = -b/2a$ e le soluzioni della disequazione saranno:

$$\text{Concordanza} \begin{cases} \text{con} & \gtrless \rightarrow \forall x \neq x_0 \\ \text{con} & \geqq \leqq \rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

Se c'è concordanza tra a e il verso della disequazione OGNI NUMERO È SOLUZIONE se c'e ≥ , ≤.
Se c'e >, < si esclude solo x_0 : $x \neq x_0$

$$\text{Discordanza} \begin{cases} \text{con} & \gtrless \rightarrow \nexists x \in \Re \\ \text{con} & \geqq \leqq \rightarrow x = x_0 \end{cases}$$

Se c'è disconcordanza tra a e il verso della disequazione NON CI SONO SOLUZIONI Se c'e >, <
si accetta solo x_0 : $x = x_0$ se c'e ≥ , ≤.

Esempi di concordanza

a) $x^2 - 2x + 1 > 0 \rightarrow \boldsymbol{\Delta} = b^2 - 4ac = = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = \mathbf{0}$ l'equazione associata ammette soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm\sqrt{0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$\Delta = 0$ a =1 e verso > , c'è concordanza → ogni numero è soluzione tranne $x = 1$.
E scriviamo: $\forall x \in R, x \neq 1$

Si osservi che Il trinomio $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$ ed e' maggiore di zero sempre perchè il quadrato di un numero sempre positivo. $(x-1)^2 = 0$ dove $x - 1 = 0 \rightarrow$ per $x = 1$.
Quindi $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$ per tutti i numeri reali tranne 1.

b) $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \rightarrow$ **$\Delta = 0$** l'equazione associata ammette soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm\sqrt{0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$\Delta = 0$ a =1 e verso $\geq$, c'è concordanza $\rightarrow$ ogni numero è soluzione $\forall$ x ϵ R perché c'è $\geq$

Esempi di discordanza:

c) $x^2 - 2x + 1 < 0 \rightarrow$ **$\Delta = 0$ l'equazione associata ha soluzione $x = 1$**

$\Delta = 0$ a =1 e verso <, c'è discordanza $\rightarrow$ nessun numero è soluzione $\nexists x \in R$

Se ci fosse stato il $\leq$ l'unica soluzione sarebbe stata $x = 1$

3) Se $\boxed{\Delta < 0}$

Concordanza $\rightarrow$ $\forall x \in \Re$

Discordanza $\rightarrow$ $\nexists x \in \Re$

Esempi:

1) $x^2 + x + 1 > 0 \rightarrow \Delta = -3 < 0$ ($\Delta = b^2 - 4\ a\ b = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$)

concordanza $a = 1 > 0$; disequazione $> 0 \rightarrow \forall x \in \Re$

2) $2x^2 + x + 3 \leq 0 \rightarrow \Delta = -23 < 0$

discordanza $a = 2 > 0$; disequazione $\leq 0 \rightarrow \nexists x \in \Re$

3) $-x^2 - 4 < 0 \rightarrow \Delta = -16 < 0$

concordanza $a = -1 < 0$; disequazione $< 0 \rightarrow \forall x \in \Re$

Metodo grafico della parabola

Ricordando che la parabola con asse verticale ha equazione:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \qquad \text{con} \qquad a \neq 0; \qquad a \wedge b \wedge c \quad \in \Re$$

e che la sua intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

Si risolve l'equazione con la formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Con $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,a\,b}$

In particolare:

- se $\Delta > 0$ i punti di intersezione sono due distinti (secante)
- se $\Delta = 0$ i punti di intersezione sono coincidenti (tangente)
- se $\Delta < 0$ non vi sono punti di intersezione (esterna)

Utilizzando il segno del coefficiente "a" si ricava la soluzione della disequazione di 2° grado.

Si ricorda che:

- $a > 0 \rightarrow$ concavità verso l'alto (convessa) $\bigcup$
- $a < 0 \rightarrow$ concavità verso il basso (concava) $\bigcap$

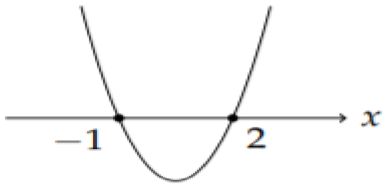
Esempi di risoluzione di disequazioni di secondo grafico con il metodo grafico

1) $x^2 - x - 2 \geq 0$ si risolve come se fosse un'equazione: $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,a\,b}$ = (-1)2 – 4(1)(-2) = 1 + 8 = **9 >0**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \rightarrow \quad x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$$

La parabola $y = x^2 - x - 2$ incontrerà l'asse delle x nei punti - 1 e 2 e rivolgerà la concavità verso l'alto essendo a =1 > 0

$$a = 1 \qquad \cup \qquad x_{1,2} = (-1;2)$$



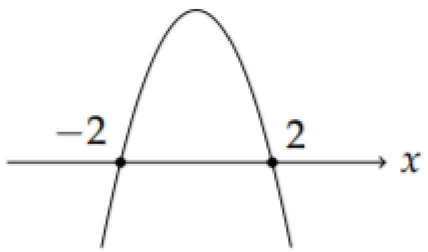
La parabola è positiva per quei valori della x il cui grafico si trova sopra l'asse delle x, ovvero per:
$x \leq -1$ e $x \geq 2$ (valori esterni)

2) $-x^2 + 4 \geq 0$

Si risolve l'equazione associata $-x^2 + 4 = 0 \rightarrow -x^2 = -4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

La parabola incontra l'asse della x nei due punti - 2 e + 2 ed essendo a = - 1 rivolge la concavità verso il basso:

$a = -1 \quad \cap \quad x_{1,2} = (-2;2)$



La parabola è NON negativa, ovvero il suo grafico sta sopra l'asse delle x (e si annulla) per:

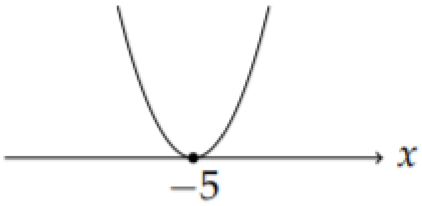
$-2 \leq x \leq 2$ (valori interni)

3) $x^2 + 10x + 25 \ > 0$ $\rightarrow$ $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4\,a\,b} = (10)^2 - 4(1)(25) = 100 - 100 = 0$

L’ unica soluzione è $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-10}{2} = -5$

In tal caso la parabola incontra l’asse delle x in un solo punto x = - 5 ed essendo a = 1 >0 rivolge la concavità verso l’alto:

$a = 1 \quad \bigcup \quad x_{1,2} = -5$



La parabola è positiva (ovvero si trova sopra l’asse della x) per tutti i valori di x tranne per x = - 5:

$\forall x \ \in R, x \ \neq -5$

4) $-x^2 + 5x - 7 \geq 0$

$\rightarrow \quad \Delta = \boldsymbol{b^2 - 4\,a\,b} = (5)^2 - 4(-1)(-7) = 25 - 28 = \mathbf{-3 < 0}$

La parabola non incontra l'asse x ed essendo a = − 1 (negativo) rivolge la concavità verso il basso:

La parabola non è mai non negativa (≥ positiva o uguale a zero) perché il suo grafico è sempre al di sotto dell'asse delle x, ovvero la parabola è sempre negativa per qualsiasi x.

Concludiamo che la disequazione non ha soluzioni: $\nexists\, x \in R$