DISEQUAZIONI FRATTE

Una disequazione **si dice fratta** se l'incognita compare al **denominatore.**

ESERCIZIO 1.

$$\frac{2x-4}{3x+2} < 0$$

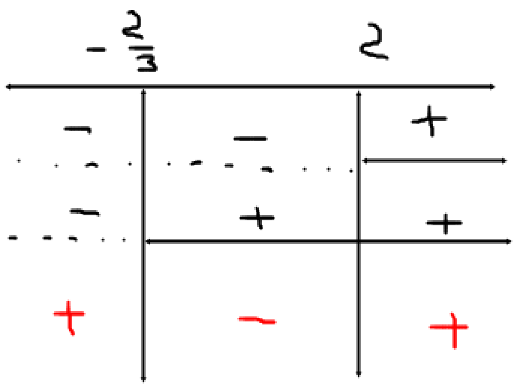
Per risolvere una disequazione fratta dobbiamo studiare il segno di tutta la frazione.
Per studiare il segno della frazione, analizziamo il segno del numeratore N e del denominatore D separatamente, ovvero:

<u>**IMPONIAMO NUMERATORE E DENOMINATORE, ENTRAMBI, SEMPRE MAGGIORI DI ZERO.**</u>

I) $2x - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad 2x > 4 \quad \rightarrow \quad x > \frac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x > 2}$

2) $3x + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad 3x > -2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x > -\frac{2}{3}}$

Dopo aver risolto le due disequazioni bisogna riportare le soluzioni sulla retta dei numeri, ovvero bisogna disegnare il grafico dei segni, dove linea continua corrisponde segno + (positivo), alla linea tratteggiata segno − :

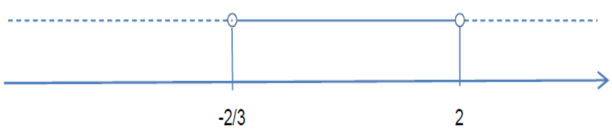


Segno di N = 2x - 4

Segno di D = 3x +2

Segno della frazione $\frac{2x-4}{3x+2}$

Poichè la disequazione fratta ha il verso < 0 (negativo), la frazione è negativa per valori interni a - 2/3 e 2. Quindi le soluzioni sono:

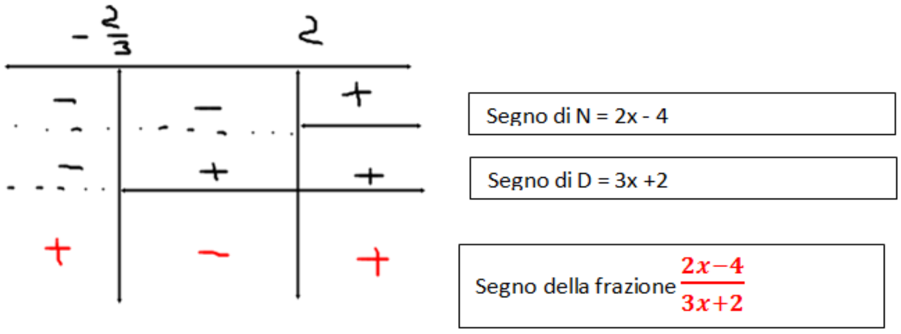


La soluzione finale è:

$$-\frac{2}{3} < x < 2 \qquad S = \left\{ x \in R \middle| -\frac{2}{3} < x < 2 \right\} \quad I = (-\frac{2}{3}; 2)$$

Se avessimo avuto il segno >, ovvero avessimo dovuto risolvere la disequazione:

$\frac{2x-4}{3x+2} > 0$ avremmo ottenuto il grafico



Le soluzioni della disequazione sono quei valori per cui il rapporto dei segni è positivo, ossia:

La soluzione finale è:

$x < -\frac{2}{3} \vee x > 2$ $\qquad$ $S = \left\{ x \in R \mid x < -\frac{2}{3} \vee x > 2 \right\}$ $\quad I = (-\infty; -\frac{2}{3}) U (2; \infty)$

Nota: se la disequazione fratta ha verso

<u>Esercizio 2:</u>

$$\frac{x^2-5x+6}{x+3} \geq 0$$

Imponiamo Numeratore ≥ 0 e il denominatore > 0 e risolviamo separatamente le due disequazioni:

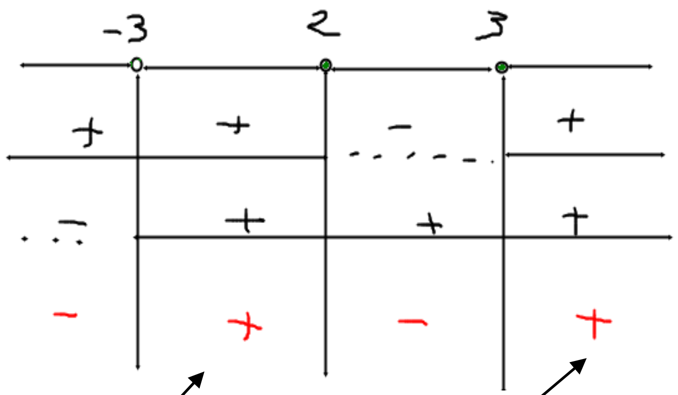
1) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ $\qquad$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $\longrightarrow$ $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Poichè c'è concordanza tra a e il verso della disequazione di ii grado (ovvero la parabola si trova sopra l'asse delle x per valori esterni all'intervallo delle soluzioni x_1 e x_2, le soluzioni sono VALORI ESTERNI: **$x \leq 2$ v $x \geq 3$**

2) x + 3 > 0 → **x > − 3**

Riportiamo le soluzioni delle due disequazioni sulla retta dei numeri (grafico dei segni):



La disequazione fratta ha il verso ≥ (positivo o uguale), quindi le soluzioni sono quei valori per cui il rapporto è positivo:

- 3 < x ≤ 2 v x ≥ 3

<u>Esercizio 3:</u>

$$\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4} \leq 0$$

Imponiamo Numeratore ≥ 0 e denominatore > 0, e risolviamo le due disequazioni separatamente:

1) $x^2-1 \geq 0$ → $x^2 = 1$ $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ La disequazione, essendoci concordanza tra a e il verso (parabola sopra asse x), ha come soluzioni **valori esterni** all'intervallo:

$\boxed{x \leq -1 \;\; v \;\; x \geq 1}$ **soluzioni I diequazione**

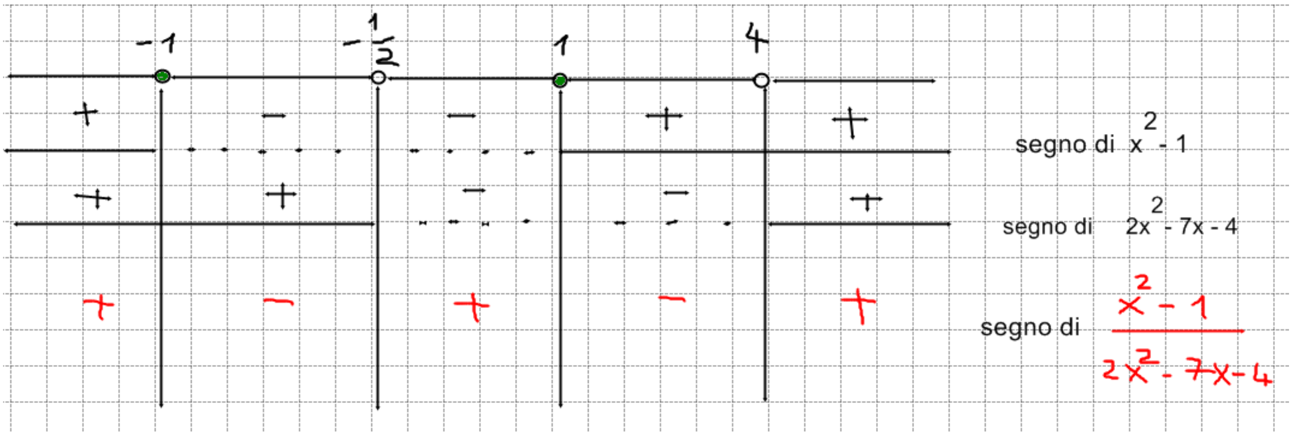
2) $2x^2 - 7x - 4 > 0$ → 0 $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-4) = 49 + 32 = 81$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{7 \pm 9}{4} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{7-9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \;,\; x_2 = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

La disequazione 2), essendoci concordanza, ha soluzioni valori esterni:

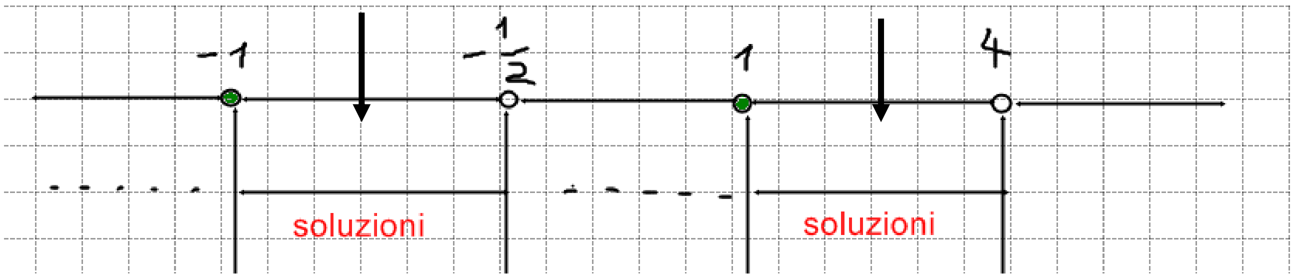
$\boxed{x < -\frac{1}{2} \;\; v \;\; x > 4}$ **soluzioni II disequazione**

Riportiamo le soluzioni delle due disequazioni sulla retta dei numeri (grafico dei segni):



La disequazione fratta ha il verso ≤ (negativo), le sue soluzioni sono gli intervalli di numeri per cui il rapporto tra i segni risulta **negativo o meglio non positivo (si accettano anche i numeri che annullano il numeratore, ovvero la frazione):**

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 1 \leq x < 4$$



Risolvi tu:

381 $\frac{x-3}{x+5} < 0$ $[-5 < x < 3]$

382 $\frac{-6x}{3x+1} \geq 0$ $\left[-\frac{1}{3} < x \leq 0\right]$

383 $\frac{x+3}{5-2x} > 0$ $\left[-3 < x < \frac{5}{2}\right]$

384 $\frac{1-3x}{x+4} > 0$ $\left[-4 < x < \frac{1}{3}\right]$

385 $-\frac{2x+1}{7-x} \leq 0$ $\left[-\frac{1}{2} \leq x < 7\right]$

386 $\frac{-(2-x)-(3+2x)}{1-x} < 0$ $[-5 < x < 1]$

387 $\frac{x^2-4}{x} > 0$ $[-2 < x < 0 \vee x > 2]$

388 $\frac{x^2+x}{2-x} \leq 0$ $[-1 \leq x \leq 0 \vee x > 2]$

390 $\frac{2x}{6x^2+x-5} \leq 0$ $\left[x < -1 \vee 0 \leq x < \frac{5}{6}\right]$

400 $\frac{x^2-4}{x^2+5x-14} < 0$ $[-7 < x < -2]$

401) $\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+6} \geq 0$ [x<-3 v -2<x≤1 v x≥3

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Risolvere un sistema consiste nel trovare i valori di x in cui le disequazioni sono CONTEMPORANEAMENTE **verificate, ovvero trovare le soluzioni comuni alle disequazioni del sistema.**
In un sistema le disequazioni sono scritte dentro una parentesi graffa.

Vediamo come si risolve un sistema di disequazioni con i seguenti esempi.

1) $\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 3x - 21 \le 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$

Si risolvono separatamente le disequazioni del sistema:

1) $x^2 - x > 0$ → x(x − 1) > 0 → x = 0 , x = 1

La disequazione, essendoci concordanza, è verificata per valori esterni:

$\boxed{x < 0 \quad v \quad x > 1}$

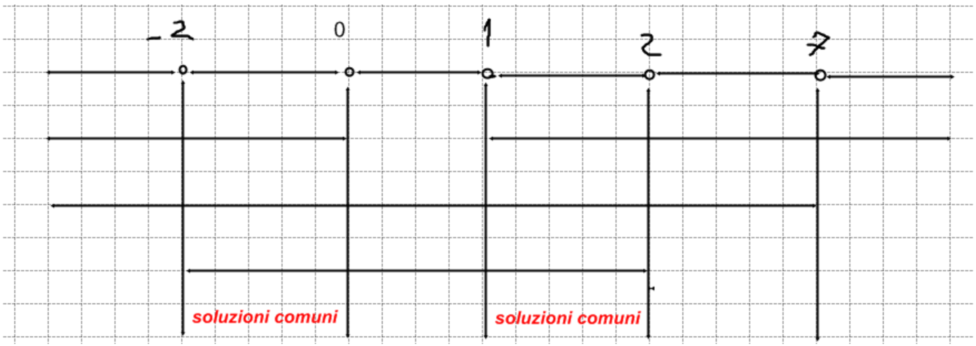
2) 3x − 21 ≤ 0 essendo una disequazione di primo grado si portano le x a sinistra e i numeri a destra cambiando il segno solo quando il termine viene spostato

3x ≤ 21 → $x \le \frac{21}{3}$ → $\boxed{x \le 7}$

3) $x^2 - 4 < 0$ → $x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ La disequazione, essendoci discordanza tra a e il verso (parabola sotto asse x), ha come soluzioni **valori interni** all'intervallo:

$\boxed{-2 < x < 2}$

Disegniamo il GRAFICO DELLE SOLUZIONI **delle tre disequazioni del sistema:**



Le tre disequazioni sono verificate contemporaneamente dove per tutte e tre abbiamo la linea continua, ovvero il sistema ha soluzioni: - 2 < x < 0 v 1 < x< 2

Risolvi tu:

452 $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ 2x-5<0 \end{cases}$ $[x \leq -1]$

453 $\begin{cases} 3(x+2)-5(x-1) \leq 0 \\ 9+3(x-4)>0 \end{cases}$ $\left[x \geq \frac{11}{2}\right]$

454 $\begin{cases} 4x+1>x+6 \\ 2x+3>-x+2 \\ 3(x+1)>1 \end{cases}$ $\left[x > \frac{5}{3}\right]$

a) $\begin{cases} 4x-12>0 \\ x^2-4x-5 \leq 0 \end{cases}$ [3< x ≤ 5]

b) $\begin{cases} x^2-9<0 \\ x^2-6x>0 \end{cases}$ [-3< x <0]